



**Dijkstra**

# O algoritmo de Dijkstra

- O algoritmo de Dijkstra, concebido pelo cientista da computação holandês Edsger Dijkstra em 1956 e publicado em 1959, soluciona o problema do caminho mais curto num grafo dirigido ou não dirigido com arestas de peso não negativo, em tempo computacional  $O([m+n]\log n)$  onde  $m$  é o número de arestas e  $n$  é o número de vértices.

# O Problema

- Um exemplo prático do problema que pode ser resolvido pelo algoritmo de Dijkstra é: alguém precisa se deslocar de uma cidade para outra. Para isso, ela dispõe de várias estradas, que passam por diversas cidades. Qual delas oferece uma trajetória de menor caminho?

# PROBLEMAS

- 1º Problema:
  - *Construir a árvore de menor comprimento total entre todos os nós de um grafo.*
- 2º Problema:
  - *Encontrar o caminho de menor comprimento total entre dois determinados nós de um grafo.*

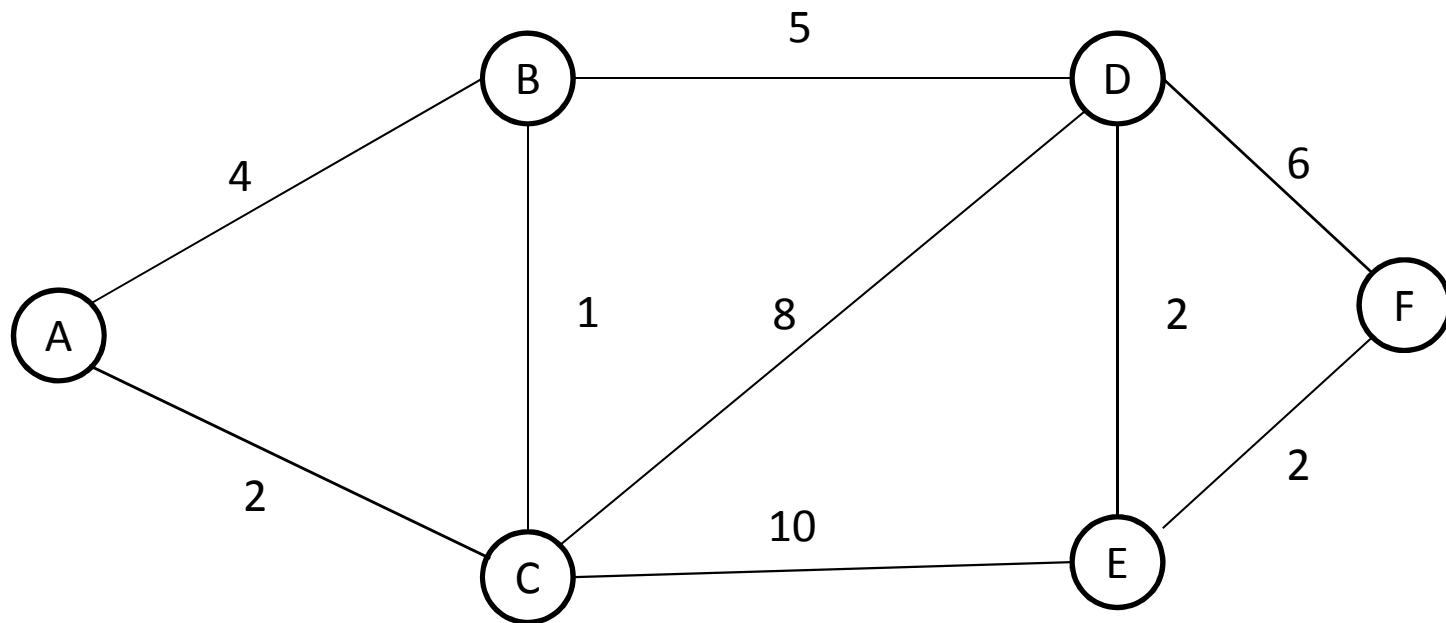
# O algoritmo de Dijkstra

- Escolhido um vértice como raiz da busca, este algoritmo calcula o custo mínimo deste vértice para todos os demais vértices do grafo. O algoritmo pode ser usado sobre grafos orientados (dígrafos), ou não, e admite que todas as arestas possuem pesos não negativos (nulo é possível).

# O algoritmo de Dijkstra

- Esta restrição (pesos não negativos ) é perfeitamente possível no contexto de redes de transportes, onde as arestas representam normalmente distâncias ou tempos médios de percurso; poderão existir, no entanto, aplicações onde as arestas apresentam pesos negativos, nestes casos o algoritmo não funcionará corretamente.

O Problema: achar o menor caminho entre A e F

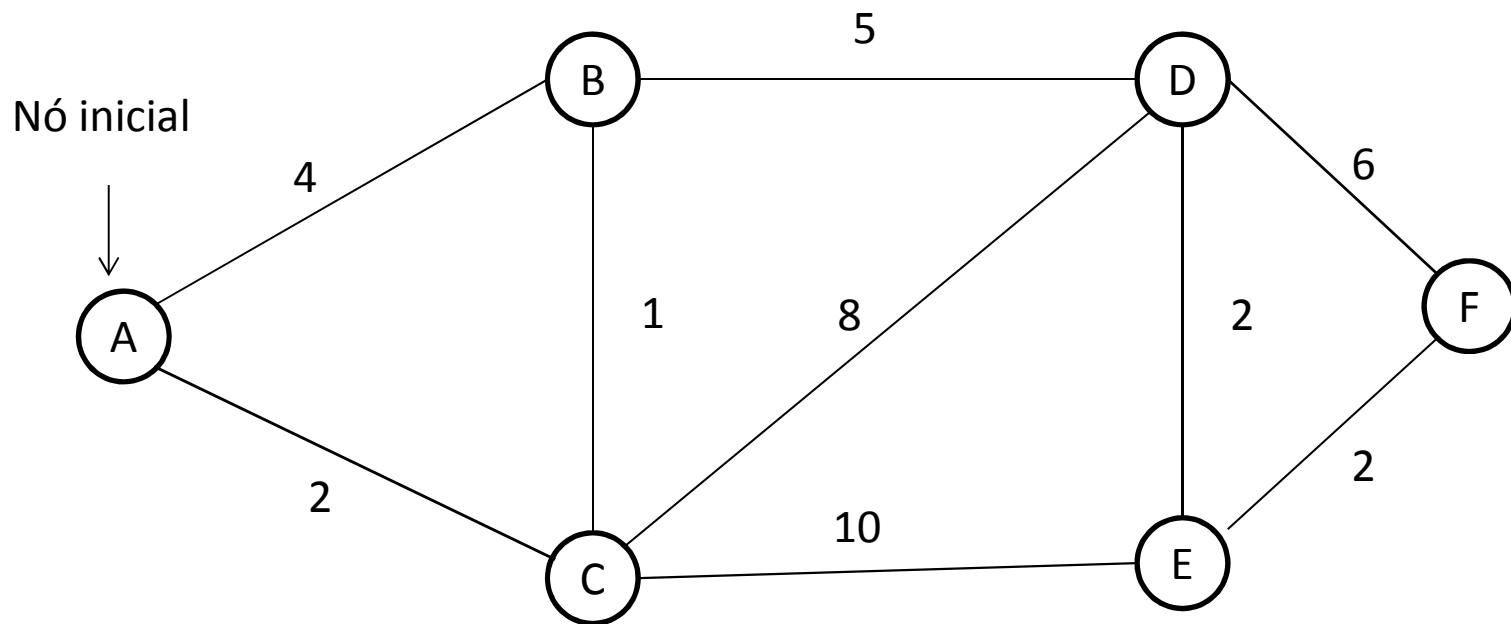


# O Algoritmo

- Seja  $G(V,A)$  um grafo orientado e  $s$  um vértice de  $G$ :
- Atribua valor zero à estimativa do custo mínimo do vértice  $s$  (a raiz da busca) e infinito às demais estimativas;
- Atribua um valor qualquer aos precedentes (o precedente de um vértice  $t$  é o vértice que precede  $t$  no caminho de custo mínimo de  $s$  para  $t$ );
- Enquanto houver vértice aberto:
  - seja  $k$  um vértice ainda aberto cuja estimativa seja a menor dentre todos os vértices abertos;
  - feche o vértice  $k$
  - Para todo vértice  $j$  ainda aberto que seja sucessor de  $k$  faça:
    - some a estimativa do vértice  $k$  com o custo do arco que une  $k$  a  $j$ ;
    - caso esta soma seja melhor que a estimativa anterior para o vértice  $j$ , substitua-a e anote  $k$  como precedente de  $j$ .



# Solução



# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A					
B						
C						
D						
E						
F						

# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A					
B						
C						
D						
E						
F						

# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A					
B	4, A					
C						
D						
E						
F						

Distância de B a A = 4

# O Algoritmo

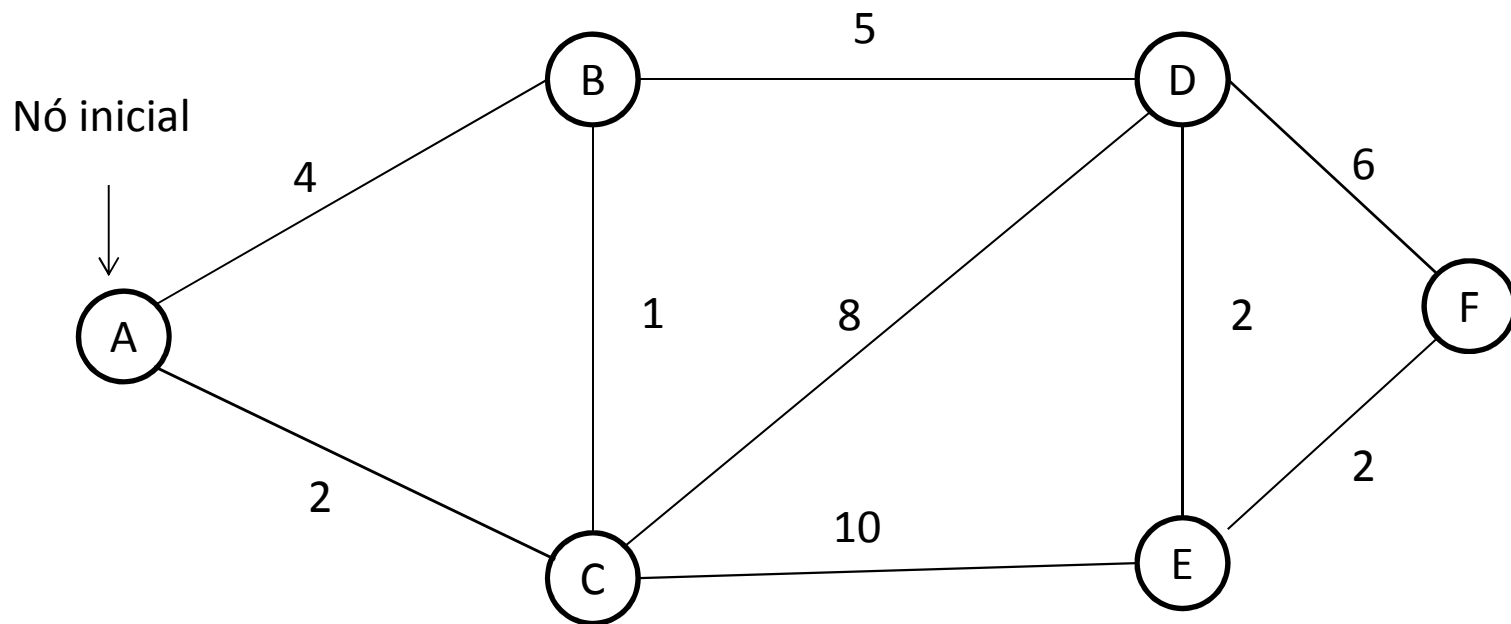
Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A					
C	2, A					
D	$\infty$					
E	$\infty$					
F	$\infty$					

Distância de B a A = 4

Distância de C a A = 2

Nós não adjacentes a A  $\rightarrow$  D, E, F =  $\infty$

# Solução



# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A					
C	2, A					
D	$\infty$					
E	$\infty$					
F	$\infty$					

Distância de B a A = 4

Distância de C a A = 2

Nós não adjacentes a A  $\rightarrow$  D, E, F =  $\infty$

Nó não mais visitado \*

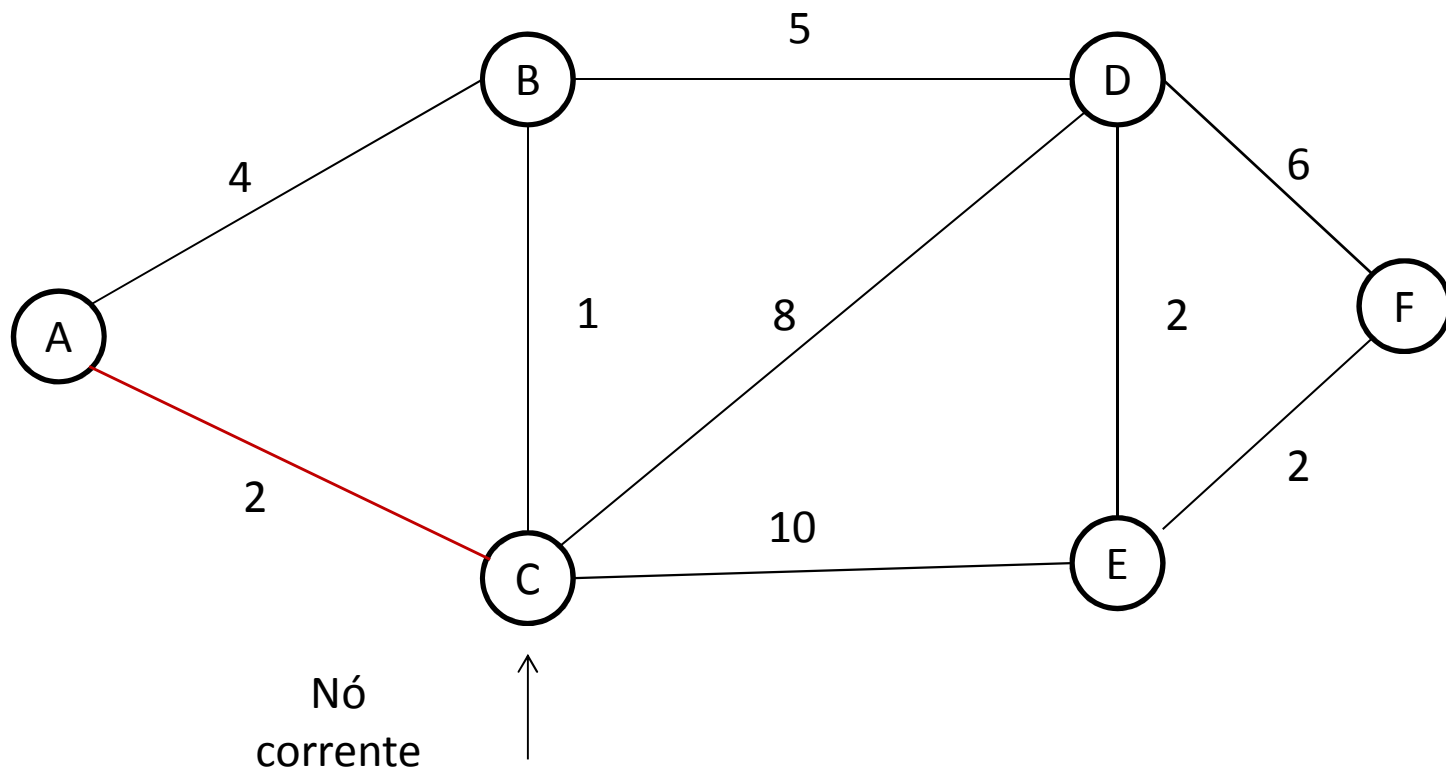
# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A					
C	2, A	2, A				
D	$\infty$					
E	$\infty$					
F	$\infty$					

Caminho de menor custo A, C = 2



# Solução



# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C				
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$					
E	$\infty$					
F	$\infty$					

A distância de B até A, com referência a C é  $(A, C) + (C, B) = 2 + 1 = 3$

# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C				
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$	10, C				
E	$\infty$	12, C				
F	$\infty$	$\infty$				

A distância de D até A, com referência a C é  $(A, C) + (C, D) = 2 + 8 = 10$

A distância de E até A, com referência a C é  $(A, C) + (C, E) = 2 + 8 = 12$

Nós não adjacentes  $(A, F) = \infty$

# O Algoritmo

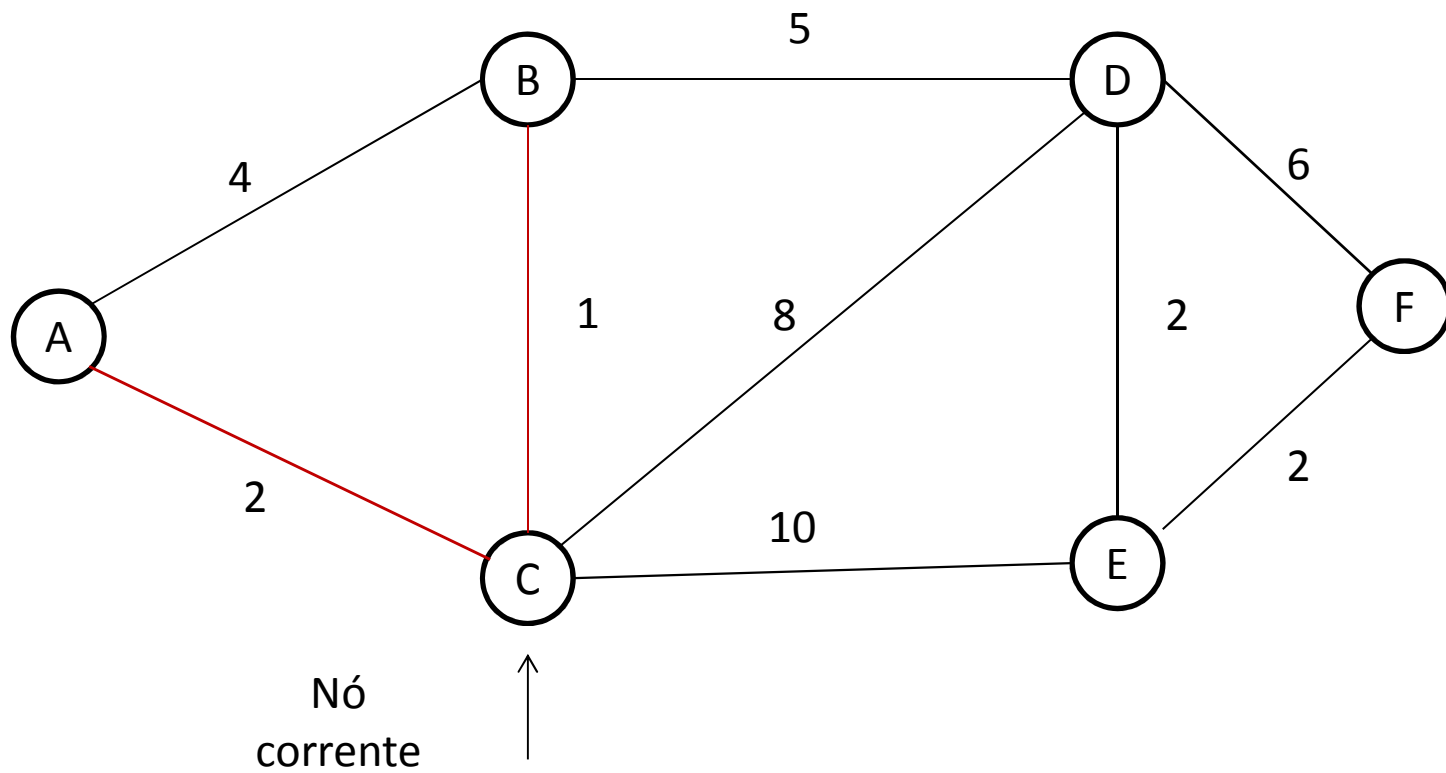
Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C				
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$	10, C				
E	$\infty$	12, C				
F	$\infty$	$\infty$				

Caminho de menor custo A, C = 3

# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C			
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$	10, C				
E	$\infty$	12, C				
F	$\infty$	$\infty$				

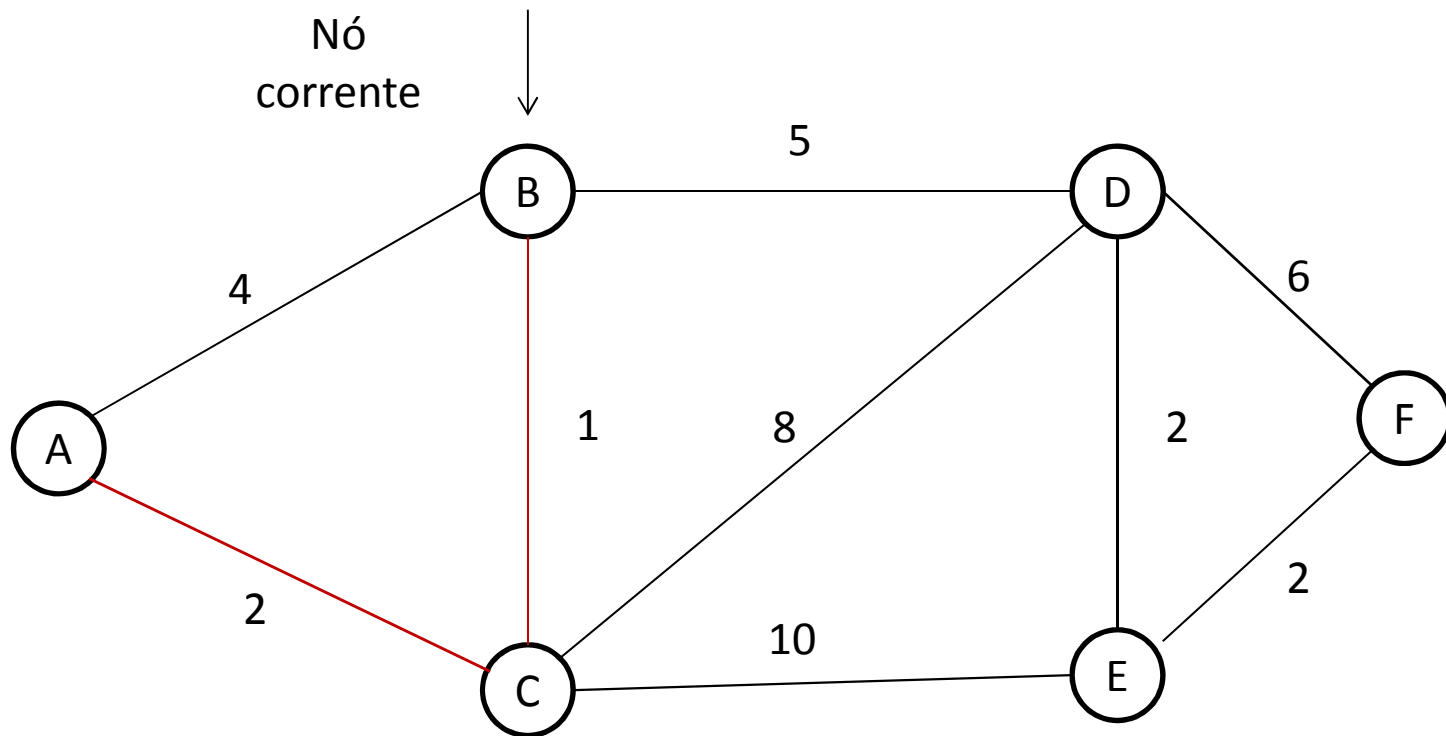
# Solução



# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$	10, C				
E	$\infty$	12, C				
F	$\infty$	$\infty$				

# Solução





# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$	10, C	8, B			
E	$\infty$	12, C	12, C			
F	$\infty$	$\infty$	$\infty$			

A distância de D até A, com referência a B é  $(A, C) + (C, B) + (B, D) = 2 + 1 + 5 = 8$

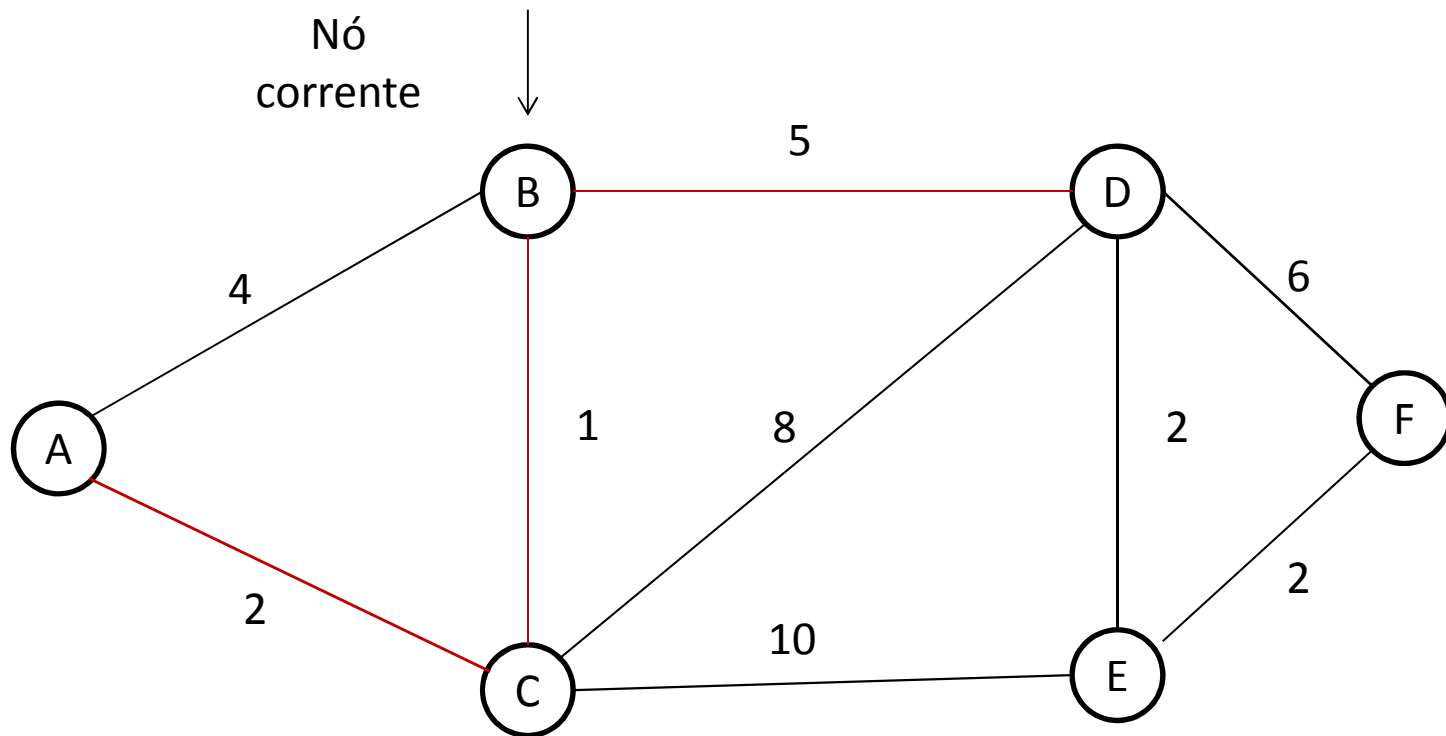
A distância de E até A, com referência a C é  $(A, C) + (C, E) = 2 + 10 = 12$

# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$	10, C	8, B			
E	$\infty$	12, C	12, C			
F	$\infty$	$\infty$	$\infty$			

Caminho de menor custo (A, D) é passando por B e C = 8

# Solução

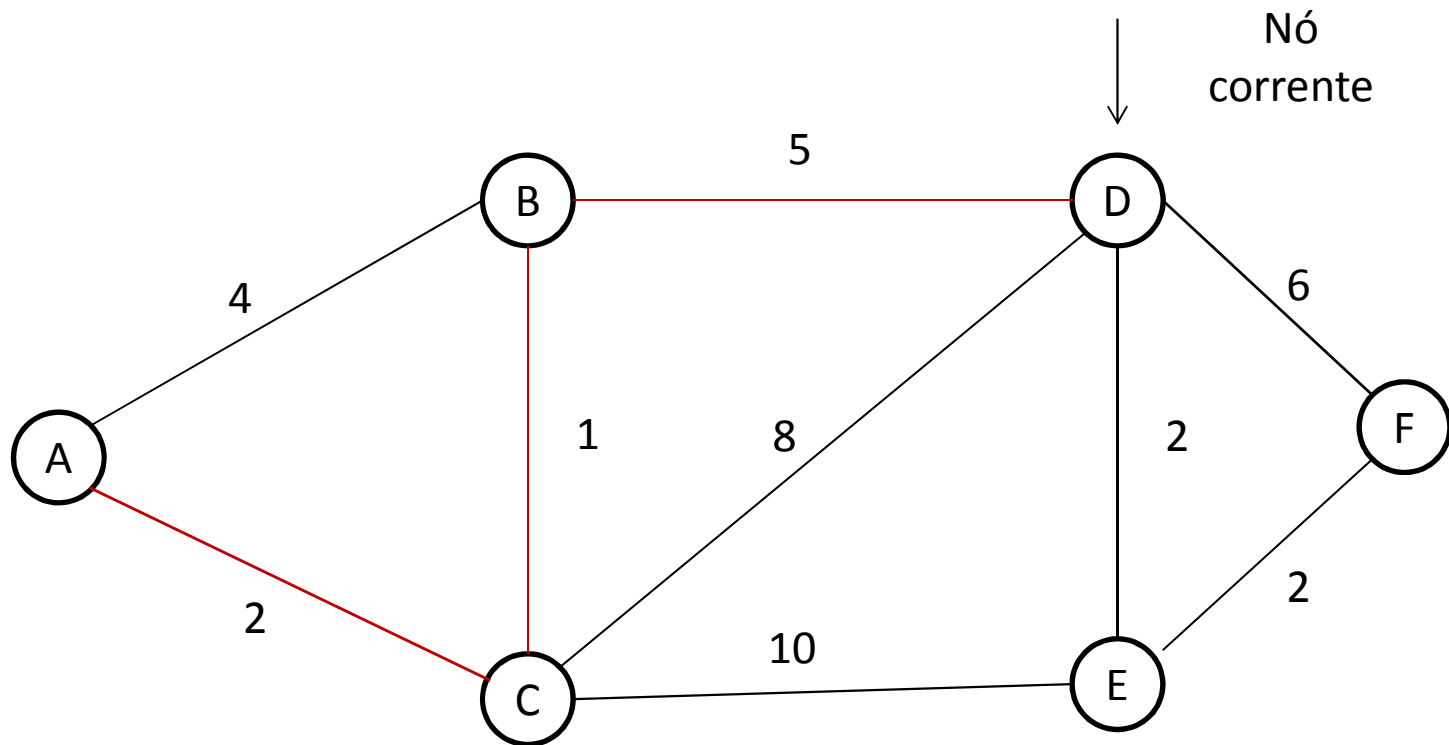


# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$	10, C	8, B	8, B		
E	$\infty$	12, C	12, C			
F	$\infty$	$\infty$	$\infty$			

Caminho de menor custo (A, D) passando por B e C = 8

# Solução

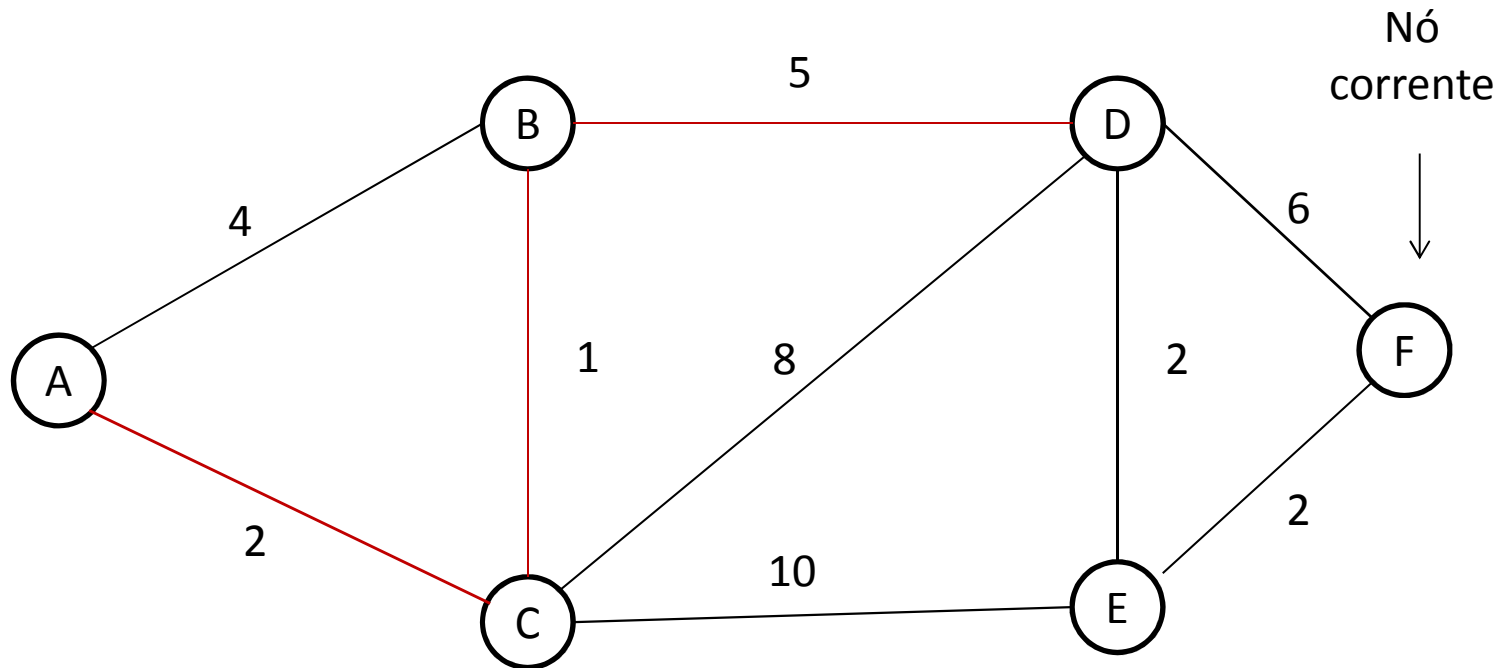


# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$	10, C	8, B	8, B	*	*
E	$\infty$	12, C	12, C	10, D		
F	$\infty$	$\infty$	$\infty$	14, D		

Caminho de menor custo (A, E) é passando por B, C e D = 10

# Solução



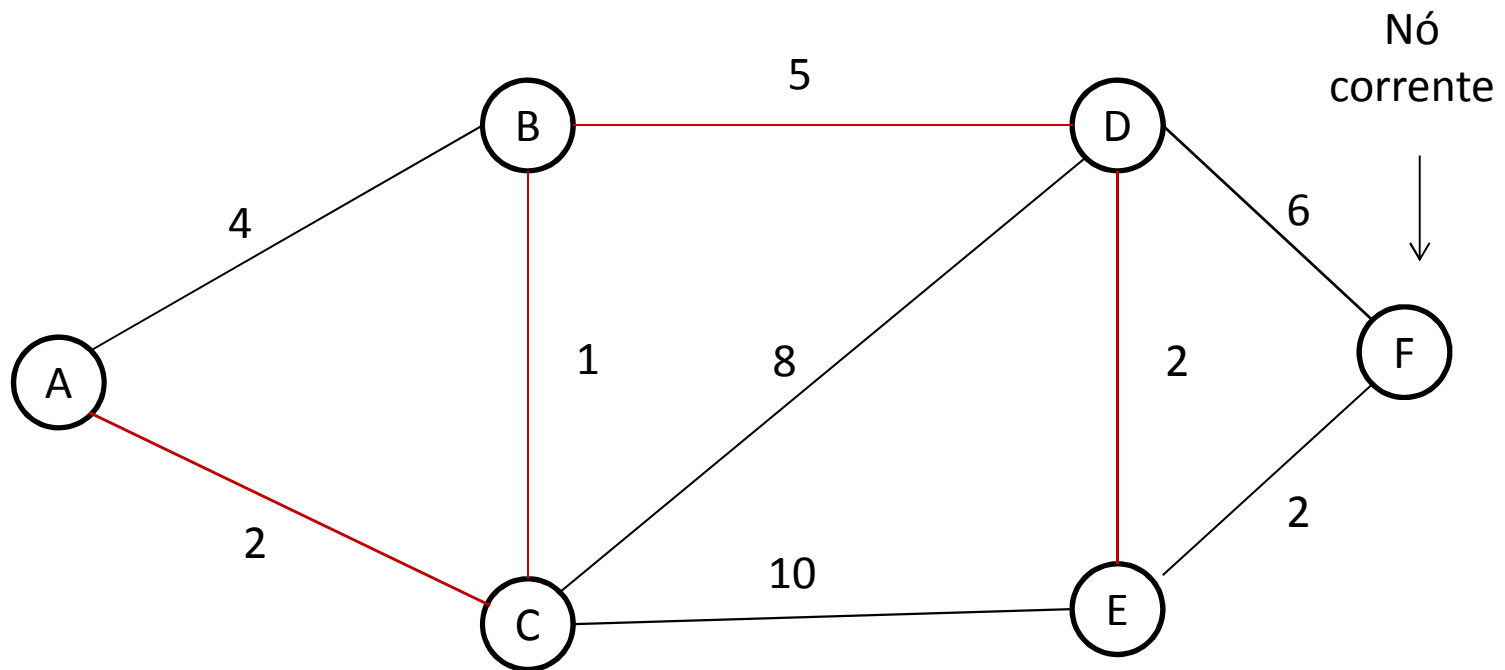
# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$	10, C	8, B	8, B	*	*
E	$\infty$	12, C	12, C	10, D	10, D	
F	$\infty$	$\infty$	$\infty$	14, D		

Caminho de menor custo (A, E) é passando por B, C e D = 10



# Solução



# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$	10, C	8, B	8, B	*	*
E	$\infty$	12, C	12, C	10, D	10, D	*
F	$\infty$	$\infty$	$\infty$	14, D	12, E	

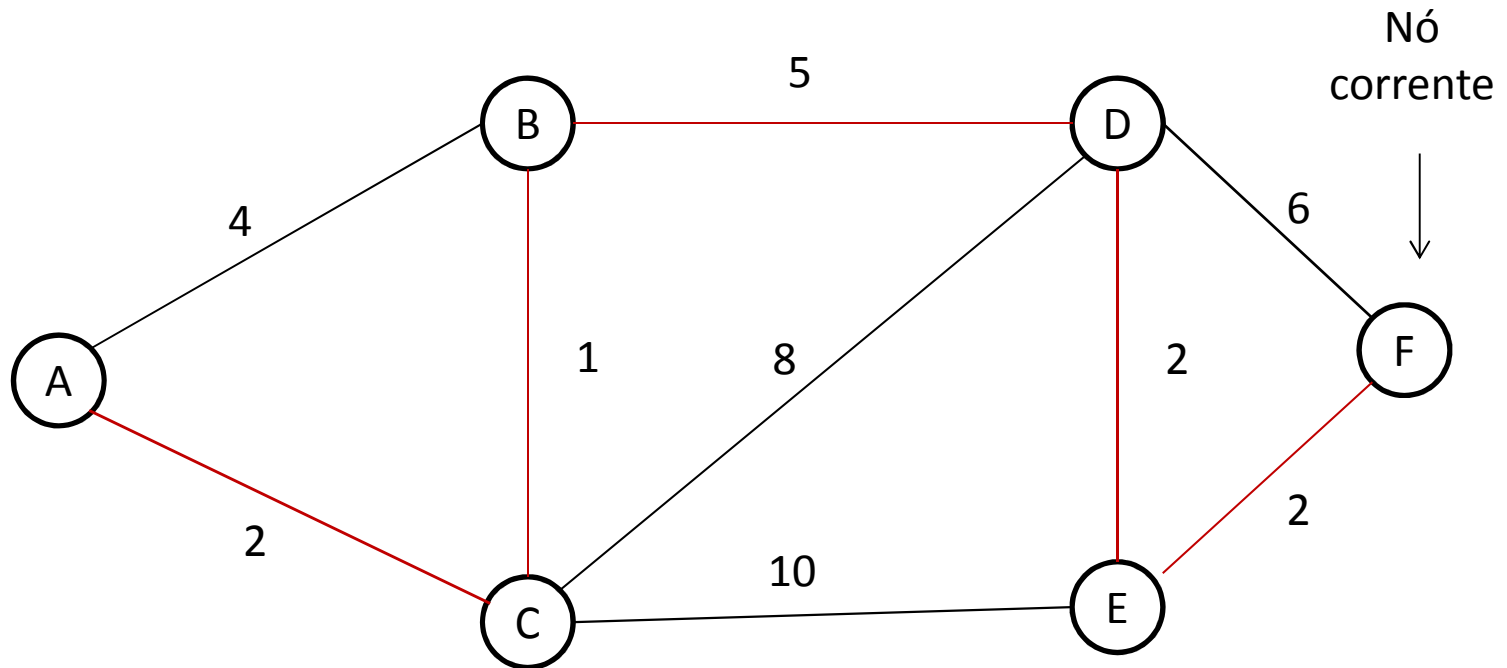
Caminho de menor custo (A, F) é passando por B, C, D e E= 12

# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$	10, C	8, B	8, B	*	*
E	$\infty$	12, C	12, C	10, D	10, D	*
F	$\infty$	$\infty$	$\infty$	14, D	12, E	12, E

Caminho de menor custo (A, F) é passando por B, C, D e E= 12

# Solução

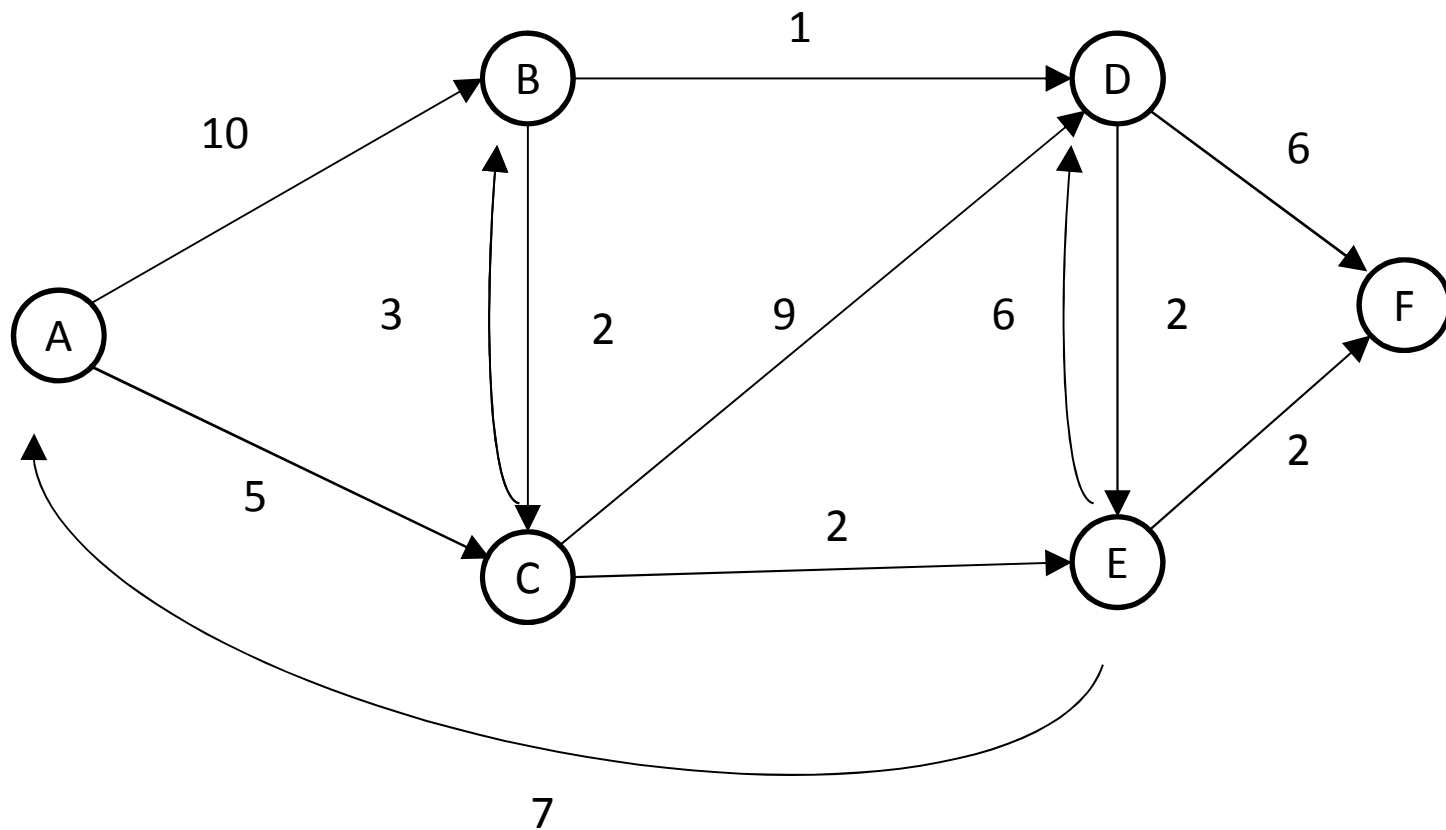


# O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	$\infty$	10, C	8, B	8, B	*	*
E	$\infty$	12, C	12, C	10, D	10, D	*
F	$\infty$	$\infty$	$\infty$	14, D	12, E	12, E

Caminho de menor custo (A, F) é passando por B, C, D e E= 12

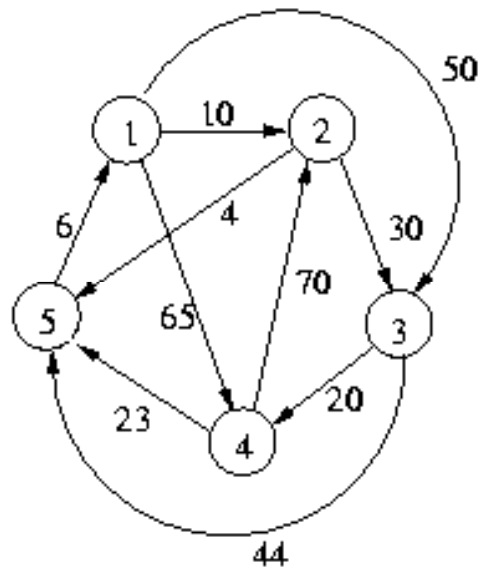
# E se o grafo for orientado?



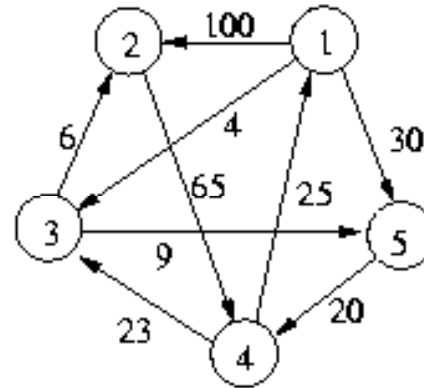
# Exercícios

- Execute o algoritmo de Dijkstra com o grafo da figura a, começando com o vértice 1.
- Execute o algoritmo de Dijkstra com o grafo da figura a, mas começando com o vértice 4. A resposta é a mesma?
- Para o grafo ilustrado na figura b, mostre cada passo da execução do algoritmo de Dijkstra. Começando com o vértice 1.

# Grafos



(a)



(b)



# Fim

